

Rozwiązanie zadania optymalnego rozłożenia węzłów interpolacji sieciami RBF z Gaussowskimi funkcjami aktywacji

Marek Bazan

Zakład Sterowania Jakością Procesów Wytwórczych,
Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki, Wydział Elektrotechniki
Politechnika Wrocławska

Plan prezentacji

- 1 Rozłożenie węzłów w zadaniu interpolacji sieciami RBF.
- 2 Rozwiązania z literatury.
- 3 Nowa metoda.
- 4 Obliczenia na klastrze WCSSu.

Rozłożenie węzłów w zadaniu interpolacji sieciami RBF

❶ Interpolacja siecią RBF z Gaussowskimi funkcjami aktywacji

Niech $Z = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$, gdzie $y_i = f(x_i)$ dla $f: \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}$. Wówczas

$$s(x) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_{\sigma}(\|x - x_i\|), \quad (1)$$

gdzie $\varphi_{\sigma}(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$, interpoluje funkcję f daną zbiorem Z dla jednoznacznie określonego wektora wag $w = (w_1, \dots, w_N)$ (c.f. [1]).

❷ Zadania interpolacji, w którym dobieramy położenie węzłów

Bezsiatkowe, oparte na RBFach, metody rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych (c.f. [2], [3]).

❸ Ograniczenie błędu interpolacji siecią RBF (c.f. [4])

$$|f(x) - s(x)| < P_{\varphi_{\sigma}, X}(x) |f|_{\mathcal{N}_{\varphi_{\sigma}}(\Omega)}, \quad \text{gdzie } X = \{x_i\}_{i=1}^N, \quad (2)$$

$$P_{\varphi_{\sigma}, X}(x)^2 = \varphi_{\sigma}(0) - 2 \sum_{j=1}^N u_j(x) \varphi_{\sigma}(\|x - x_j\|) + \sum_{i,j=1}^N u_i(x) u_j(x) \varphi_{\sigma}(\|x_i - x_j\|)$$

Dotychczas znane rozwiązania

- ① Rozwiązania geometryczne,
A. Iske (c.f. [5]),
- ② Rozwiązanie quasi-optymalne,
S. de Marchi, R. Schaback, H. Wendland (c.f. [6]).

❶ Sformułowanie zadania jako problem min-max'owy Niech

$$\underline{X} = \left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(d)}, \dots, x_N^{(1)}, x_N^{(2)}, \dots, x_N^{(d)} \right) \in \Omega^N \subset \mathcal{R}^{N \cdot d}$$

oznacza układ węzłów $X = \{x_i\}_{i=1}^N$, gdzie $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(d)})$.
Wówczas rozwiązujemy zadanie

$$\min_{\underline{X} \in \Omega^N} \|P_{\phi_{\sigma}, \underline{X}}(\cdot)\|_{\sup} = \min_{\underline{X} \in \Omega^N} [\max_{x \in \Omega} P_{\phi_{\sigma}, \underline{X}}(x)]. \quad (3)$$

❷ Rozwiązanie zadania – optymalizacja z ograniczeniami

- ❶ Max problem – „scan” na zbiorze dyskretnym próbującym Ω ,
- ❷ Min problem – algorytm bezgradientowy Rosenbrocka.

❸ Pierwsza prezentacja wyników Zakopane Czerwiec 2013

M. Bazan, E. Skubalska-Rafajłowicz (c.f. [7]).

Obliczenia na klastrze WCSSu.

❶ Poszukiwanie najlepszego algorytmu dla zadania minimalizacji

W obliczeniach $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Jedno wyznaczenie rozwiązania zadania maksymalizacji zajmowało około 1min na węźle supernowej.

- ❶ Nie zadziałały: metoda mnożników Lagrange'a z BFGsem, m. sympleks, symulowane wyżarzanie, algorytm genetyczny.
- ❷ Zadziałała: metoda Rosenbrocka.

❷ Obliczenia dla 64 punktów

10 konfiguracji startowych z rozkładu kwadratu łacińskiego w Ω . Każda około 70000 wyznaczeń rozwiązania zadania maksymalizacji.

❸ Obliczenia dla 54 punktów

- ❶ 10 konfiguracji startowych z rozkładu kwadratu łacińskiego w Ω . Każda od 40000 do 65000 wyznaczeń rozwiązania zadania maksymalizacji.
- ❷ 2 konfiguracje startowe dla krzywych wypełniających w Ω – Hilberta i Sierpińskiego. Każda około 65000 wyznaczeń rozwiązania zadania maksymalizacji.

Dziękuję za uwagę.



Micchelli Ch. A.,

Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally Positive Definite Functions, *Constructive Approximation*, Vol. 2, 1986, pp. 11–22.



Kansa E. J.,

Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics II, solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Comput. Math. Appl.*, Vol. 19, 1990, pp. 147—161.



Dehghan M., Tatari M.

Use of radial basis functions for solving the second-order parabolic equation with nonlocal boundary conditions, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, Vol. 24, 2008, pp. 924–938.



Wu Z., Schaback R.,

Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data, *NIMA J. Numer. Anal.*, Vol. 13, 1993, pp. 13–27.



Iske A.,

Optimal distribution of centers for radial basis function methods, *Tech Rep. M0004*, 2000, Technische Universität München.



De Marchi S., R. Schaback, H. Wendland,

Near-optimal data-independent points locations for radial basis function interpolation, *Adv. in Comp. Math.*, Vol. 23(3), 2003, 317–330.



M. Bazan, E. Skubalska-Rafajłowicz,

A new method of centers location in Gaussian RBF interpolation networks, wysłane na konferencje *International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing*, Zakopane, 2013.